MA2115 Clase 5: Series de potencias. Operaciones con series de potencias.

Elaborado por los profesores
Edgar Cabello y Marcos González

1 Series de potencias

Cuando estudiamos las series geométricas, demostramos la siguiente fórmula: si $|r| < 1$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}.$$

Esto nos dice que la función $f(x) = \dfrac{a}{1-x}$, puede ser representada como $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} ax^n = a + ax + ax^2 + \cdots$, al menos en el intervalo $(-1, 1) = \{x \in \mathbb{R} \colon |x| < 1\}$. Es natural preguntarnos si podemos expresar de forma parecida a otras funciones como $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, e^x, $\ln x$, etc, de modo que podamos aproximar mediante polinomios a dichas funciones (observemos, por ejemplo, que es más sencillo calcular la imagen de 1 mediante un polinomio con coeficientes racionales que calcular $\operatorname{sen} 1$).

Definicion 1 *Sea $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números reales cualquiera. Una serie de potencias es una serie de la forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots ,$$

donde x es una variable. Más generalmente, una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots ,$$

es llamada una serie de potencias centrada en c.

Por ejemplo, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n}$ son series de potencias centradas en 0, 1 y -2, respectivamente.

Una serie de potencias en x puede ser vista como una función en x:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n,$$

cuyo dominio es el conjunto de todos los valores que puede tomar x para los cuales la serie converge. En particular, el dominio siempre contiene al punto $x = c$, en el cual vale $f(c) = a_0$.

Ejemplo 1 *Consideremos la serie de potencias* $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} x^n$. *Usando el criterio del cociente y el hecho que*

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^2}{n+2} x^{n+1}}{\frac{n^2}{n+1} x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2(n+1)}{(n+2)n^2} |x| = |x|,$$

tenemos que la serie converge si $R = |x| < 1$ *y diverge si* $|x| > 1$. *Para determinar que ocurre en* $|x| = 1$, *observemos que*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{n^2}{n+1} x^n \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} |x|^n = \infty \neq 0,$$

de modo que diverge en ambos casos. En suma, el dominio de la función $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} x^n$ *es* $(0,1) = \{x \colon |x| < 1\}$.

Teorema 1 (Convergencia de series de potencias) *Para una serie de potencias centrada en* c, *ocurre alguna de las tres siguientes posibilidades:*

a) *La serie converge sólo en* c.

b) *Existe un número* $R > 0$ *tal que la serie converge absolutamente si* $|x-c| < R$ *y diverge si* $|x-c| > R$.

c) *La serie converge para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Demostración: Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ una serie centrada en c. Demostraremos sólo el caso particular en el cual el límite $L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ existe, el cual es suficiente para los ejemplos y problemas que veremos en el curso. Tenemos, en virtud del criterio del cociente, que la serie converge en x siempre que $0 < L < \infty$

$$1 > \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-c)^{n+1}}{a_n(x-c)^n} \right| = |x-c| \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Por lo tanto, la serie converge para todo x tal que $|x-c| < \frac{1}{L}$ y diverge para todo x tal que $|x-c| > \frac{1}{L}$. Podemos considerar $R = \frac{1}{L}$ (caso **b)**). Observemos que si $L = 0$ entonces siempre se cumple que $1 > |x|0 = 0$, con lo cual la serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$ (caso **c)**). Finalmente, si $L = \infty$, como debe cumplirse que $1 > |x|\infty$, la serie diverge para todo $x \neq 0$ (caso **a)**; recordemos que siempre converge en 0). $\square$

Definicion 2 *Dada una serie de potencias centrada en* c, *definimos el radio de convergencia* R *como*

a) 0 *si la serie converge sólo en* c.

b) $0 < R < \infty$ *si la serie converge absolutamente para* $|x-c| < R$ *y diverge para* $|x-c| > R$.

c) ∞, *si la serie converge para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Hemos visto que si $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ *tiende a algún valor de* $[0,\infty)$ *o a* ∞, *entonces es igual a* R.

Ejemplo 2 *Consideremos la serie de potencias* $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$. *Entonces, el radio de convergencia está dado por:*

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{n^n}{n!}}{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{e}.$$

Por lo tanto, la serie converge si $|x| < \dfrac{1}{e}$ *y diverge si* $|x| > \dfrac{1}{e}$.

Definicion 3 *Dada una serie de potencias* $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$, *el conjunto de convergencia de* f *es el intervalo en el cual la serie converge. Dicho intervalo puede ser de las siguientes formas:* $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$, $(c-R, c+R)$, $[c-R, c+R)$, $(c-R, c+R]$, $[c-R, c+R]$ *y, finalmente,* $\{c\} = [c,c]$.

Ejemplo 3 *Dada la serie de potencias* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n3^n}$, *determine su conjunto de convergencia.*

Solución: El radio de convergencia está dado por

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n3^n}}{\dfrac{1}{(n+1)3^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)3^{n+1}}{n3^n} = 3.$$

Por lo tanto, el conjunto de convergencia está dado por el intervalo $(c-R, c+R) = (2,8)$ unido posiblemente con uno o ambos extremos. Es fácil ver que la serie en $x = 2$ es igual a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ y, por lo tanto, converge, mientras que la serie en $x = 8$ es igual a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ y, por lo tanto, diverge. Así, el conjunto de convergencia es $[2,8)$. □

2 Propiedades de las series de potencias

A continuación, enunciamos sin demostración un teorema que muestra el comportamiento de las series de potencias bajo la derivada y la integral.

Teorema 2 *Sea $f(x)$ la función definida por una serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, *con radio de convergencia R. Entonces, en el intervalo $(c-R, c+R)$, la función f es continua, derivable e integrable. Además, se cumplen las siguientes fórmulas:*

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-c) + \cdots + na_n(x-c)^{n-1} + \cdots$$
$$\int f(x)dx = c + a_0(x-c) + a_1\frac{(x-c)^2}{2} + \cdots + a_n\frac{(x-c)^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

En cada caso, el radio de convergencia de la serie obtenida es igual a R.

Ejemplo 4 *Encuentre una serie de potencias la cual represente a la función* $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$, *en el intervalo* $(-1,1)$.

Solución: Observemos que la función $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$, satisface, por una parte, que $g'(x) = -f(x)$ y, por otra parte,

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n.$$

Así, derivando término a término la serie del último miembro, obtenemos que

$$\frac{1}{(x+1)^2} = -g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nx^{n-1},$$

de lo cual se deduce que

$$\frac{1}{(x+1)^2} = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nx^{n-1} = 1 - 2x + 3x^2 - \cdots + (-1)^{n-1}nx^{n-1} + \cdots .$$

$\square$

Ejemplo 5 *Encuentre una serie de potencias la cual represente a la función* $h(x) = \ln(1+x)$, *en el intervalo* $(-1,1)$.

Solución: Observemos que la función $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$, satisface, por una parte, que $h'(x) = g(x)$ y, por otra parte,

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n.$$

Así, integrando término a término la serie del último miembro, obtenemos que

$$\ln(x+1) = c + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1},$$

para algún $c \in \mathbb{R}$, el cual se puede calcular evaluando en $x = 0$, lo cual nos da $c = 0$. Por lo tanto,

$$\ln(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots .$$

$\square$

Proposicion 1 *Dadas* $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, *son validas las siguientes propiedades:*

a) $f(kx) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n k^n x^n$*;*

b) $f(x^m) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{mn}$*;*

c) $f(x) \pm g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$*;*

d) $f(x)g(x) = \displaystyle\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, *donde* $c_k = \displaystyle\sum_{n+m=k} a_n b_m = \sum_{n=0}^{k} a_n b_{k-n}$.

Para las operaciones antes descrita, el conjunto de convergencia puede cambiar.

Ejemplo 6 *Encuentre una serie de potencias la cual represente a la función* $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, *en el intervalo* $(-1, 1)$.

Solución: Tenemos que $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$, pero

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots, \text{ y} \\
\ln(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots,
\end{aligned}$$

con lo cual obtenemos que

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(1+x) - \ln(1-x) \\
&= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots\right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots\right) \\
&= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots\right) + \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots\right) \\
&= 2x + 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots.
\end{aligned}$$

Es decir, $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Dejamos como ejercicio el cálculo del radio y conjunto de convergencia de esta última serie. □